



الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا  
الدورة الإستدراكية 2010  
الموضوع



الصفحة
1
4

9	المعامل:	RS24	الرياضيات	المادة:
4	مدة الإنجاز:	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)		الشعب(ة) أو المسلك:

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.
- يتكون الموضوع من ثلاثة تمارين و مسألة جميعها مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالبنىات الجبرية.
- التمرين الثاني يتعلق بالأعداد العقدية.
- التمرين الثالث يتعلق بحساب الاحتمالات.
- المسألة تتعلق بالتحليل.

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة القابلة للبرمجة

**التمرين الأول: (3 نقط)**

نذكر أن  $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$  حلقة واحدة غير تبادلية.

$$E = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ x^2 & 2x & 1 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\} : \text{نعتبر المجموعة :}$$

- (1) 0.5 بين أن  $E$  جزء مستقر في  $(M_3(\mathbb{R}), \times)$
- (2) 0.5 أ- بين أن التطبيق  $\varphi$  الذي يربط العدد الحقيقي  $x$  بالمتصفوفة  $M(x)$  تشاكل تقابلي من  $(\mathbb{R}, +)$  نحو  $(E, \times)$ .  
0.5 ب- استنتج أن زمرة  $(E, \times)$  زمرة تبادلية.  
0.5 ج- حدد  $M^{-1}(x)$  مقلوب المتصفوفة  $M(x)$  حيث  $x$  عدد حقيقي.  
0.5 د- حل في المجموعة  $E$  المعادلة:  $A^5 X = B$  حيث:  $A = M(2)$  و  $B = M(12)$  و  $A^5 = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{5 \text{ مرات}}$
- (3) 0.5 بين أن المجموعة:  $F = \{M(\ln(x)) / x \in \mathbb{R}_+^*\}$  زمرة جزئية للزمرة  $(E, \times)$ .

**التمرين الثاني: (4 نقط)**

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد و ممنظم و مباشر  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

- (1) 0.5 نعتبر في المجموعة  $\mathbb{C}$  المعادلة  $z^2 - 4iz - 2 + 2i\sqrt{3} = 0$   $(E)$   
0.5 أ- تحقق ان العدد العقدي  $a = 1 + i(2 - \sqrt{3})$  حل للمعادلة  $(E)$   
0.5 ب- استنتج  $b$  الحل الثاني للمعادلة  $(E)$
- (2) 0.5 أ- بين أن:  $a^2 = 4(2 - \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{6}}$   
0.75 ب- اكتب العدد  $a$  على الشكل المثلثي.
- (3) 0.5 نعتبر النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  التي ألقاها على التوالي  $a$  و  $b$  و  $c = 2i + 2e^{i\frac{\pi}{7}}$   
لتكن  $(\Gamma)$  الدائرة التي أحد أقطارها  $[AB]$   
0.5 أ- حدد  $\omega$  لحق النقطة  $\Omega$  مركز الدائرة  $(\Gamma)$   
0.5 ب- بين أن النقطتين  $O$  و  $C$  تنتميان للدائرة  $(\Gamma)$   
0.75 ج- بين أن العدد العقدي  $\frac{c-a}{c-b}$  تخيلي صرف.

**التمرين الثالث: (3 نقط)**

يحتوي صندوق على 10 كرات بيضاء و كرتين حمراوين .  
نسحب الكرات من الصندوق الواحدة تلو الأخرى بدون إحلال إلى أن نحصل لأول مرة على كرة بيضاء  
ثم نوقف التجربة .  
ليكن  $X$  المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات المسحوبة.

- (1) 0.25 أ- حدد مجموعة قيم المتغير العشوائي  $X$

- ب- احسب احتمال الحدث  $[X=1]$  0.5
- ج- بين أن:  $p[X=2] = \frac{5}{33}$  0.5
- د- احسب احتمال الحدث  $[X=3]$  0.5
- (2) أ- بين أن:  $E(X) = \frac{13}{11}$  . (حيث  $E(X)$  هو الأمل الرياضي للمتغير العشوائي  $X$ ) 0.5
- ب- احسب  $E(X^2)$  ثم استنتج قيمة  $V(X)$ . (حيث  $V(X)$  هي مغايرة المتغير العشوائي  $X$ ) 0.75

**مسألة: (10 نقط)**

I- نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على المجال  $I = [0,1]$  بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{1 - \ln(1-x)} & ; 0 \leq x < 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

و ليكن  $(C)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في معلم متعامد ممنظم  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

- (1) بين أن الدالة  $f$  متصلة على اليسار في 1 0.5
- (2) أدرس قابلية اشتقاق الدالة  $f$  على اليسار في 1 0.5
- (3) أدرس تغيرات الدالة  $f$  على المجال  $I$  ثم أعط جدول تغيراتها. 0.75
- (4) أ- بين أن المنحنى يقبل نقطة انعطاف وحيدة أفصولها  $\frac{e-1}{e}$  0.5
- ب- أنشئ المنحنى  $(C)$  مبرزا نصف مماسه في النقطة التي أفصولها 0. (نأخذ  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$ ) 0.75
- (5) بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد  $\alpha$  من المجال  $I$  يحقق:  $f(\alpha) = \alpha$  0.5
- (6) أ- بين أن الدالة  $f$  تقابل من المجال  $I$  نحو  $I$ . 0.25
- ب- حدد  $f^{-1}(x)$  لكل عنصر  $x$  من المجال  $I$ . 0.5

II- نضع:  $I_0 = \int_0^1 f(t) dt$  و لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم  $n$ :  $I_n = \int_0^1 t^n f(t) dt$

- (1) بين أن المتتالية  $(I_n)_{n \geq 0}$  تناقصية ثم استنتج أنها متقاربة. 0.75
- (2) بين أن:  $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$  ( $\forall n \geq 0$ ) ثم حدد نهاية المتتالية  $(I_n)_{n \geq 0}$ . 0.75

III- لكل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $J = [0,1[$  و لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم  $n$  نضع:

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} F_k(x) \text{ و } F(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{1-t} dt \text{ و } F_n(x) = \int_0^x t^n f(t) dt \text{ و } F_0(x) = \int_0^x f(t) dt$$

- (1) بين أن:  $(\forall n \in \mathbb{N}) (\forall x \in J) F(x) - S_n(x) = \int_0^x \frac{t^{n+1} f(t)}{(1-t)} dt$  1

2) أ- بين أن الدالة :  $x \rightarrow (1-x)(1-\ln(1-x))$  تناقصية قطعاً على المجال  $J$  0.5

ب- استنتج أن الدالة :  $t \rightarrow \frac{f(t)}{1-t}$  تزايدية قطعاً على المجال  $[0, x]$  مهما يكن  $x$  من المجال  $J$  0.5

3) أ- بين أن :  $(\forall n \in \mathbb{N}) (\forall x \in J) : 0 \leq F(x) - S_n(x) \leq \frac{1}{n+2} \left( \frac{1}{1-x} \right)$  1

ب- استنتج أنه مهما يكن العدد  $x$  من المجال  $J$  لدينا :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = F(x)$  0.5

4) أ- حدد  $F(x)$  من أجل  $x \in J$  0.5

ب- حدد النهاية :  $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x)$  0.25

## تقديم: ذ. العربي الوظيفي

ثانوية ابن تومرت مراكش

## التمرين 1:

1. نبين أن  $E$  جزء مستقر في  $(M_3(R), \times)$ .ليكن  $M$  و  $N$  عنصرين من  $E$  ،إذن يوجد عدنان حقيقيان  $x$  و  $y$  حيث  $M = M(x)$  و  $N = M(y)$  .

$$M(x) \times M(y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ x^2 & 2x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y & 1 & 0 \\ y^2 & 2y & 1 \end{pmatrix} : \text{لدينا}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x+y & 1 & 0 \\ (x+y)^2 & 2(x+y) & 1 \end{pmatrix}$$

$$= M(x+y)$$

إذن لكل  $M$  و  $N$  من  $E$  :  $M \times N \in E$ 

ومنه

 $E$  جزء مستقر في  $(M_3(R), \times)$ .2.أ. نبين أن  $\varphi$  تشاكل تقابلي من  $(R, +)$  نحو  $(E, \times)$  .ليكن  $x$  و  $y$  من  $R$  . لدينا :

$$\varphi(x+y) = M(x+y) = M(x) \times M(y) = \varphi(x) \times \varphi(y)$$

إذن لكل  $x$  و  $y$  من  $R$  لدينا :  $\varphi(x+y) = \varphi(x) \times \varphi(y)$  .ومنه :  $\varphi$  تشاكل من  $(R, +)$  نحو  $(E, \times)$  .لكل عنصر  $M$  من  $E$  يوجد عدد حقيقي  $x$  حيث  $M = M(x)$  وذلك حسب تعريف  $M$  .ومنه  $\varphi$  تطبيق شمولي من  $R$  نحو  $E$  .ليكن  $x$  و  $y$  من  $R$  ، لدينا

$$\varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow M(x) = M(y)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 = y^2 \\ 2x = 2y \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = y$$

إذن لكل  $x$  و  $y$  من  $R$  حيث  $\varphi(x) = \varphi(y)$  لدينا  $x = y$  .ومنه  $\varphi$  تطبيق تبايني من  $R$  نحو  $E$  .وعليه فإن  $\varphi$  تشاكل تقابلي من  $(R, +)$  نحو  $(E, \times)$  .2.ب. نستنتج أن  $(E, \times)$  زمرة تبادلية :نعلم أن  $(R, +)$  زمرة تبادلية وحيث أن  $\varphi$  تشاكل تقابلي من  $(R, +)$  نحو  $(E, \times)$  فإن  $(E, \times)$  زمرة تبادلية .2.ج. نحدد مقلوب المصفوفة  $M(x)$  حيث  $x$  من  $R$  :ليكن  $x$  عددا حقيقيا . مماثل  $x$  في  $(R, +)$  هو  $(-x)$  .

http://www.vrac-colorpages.net

بما أن  $\varphi$  تشاكل تقابلي من  $(\mathbb{R}, +)$  نحو  $(\mathbb{E}, \times)$  فإن مماثل  $\varphi(x)$  في  $(\mathbb{E}, \times)$  هو  $\varphi(-x)$ .  
ومنه

$$\text{مقلوب المصفوفة } M(x) \text{ هو المصفوفة } M(-x).$$

2. د. نحل في المجموعة  $E$  المعادلة  $A^5 \cdot X = B$  حيث  $A = M(2)$  و  $B = M(12)$  و  $A^5 = A \times A \times A \times A \times A$ :

ليكن  $X$  عنصرا من  $E$ .  
إذن  $X = M(x)$  حيث  $x$  عنصر من  $\mathbb{R}$ .  
بما أن  $\varphi$  تشاكل تقابلي من  $(\mathbb{R}, +)$  نحو  $(\mathbb{E}, \times)$  فإن  $\varphi^{-1}$  تشاكل تقابلي من  $(\mathbb{E}, \times)$  نحو  $(\mathbb{R}, +)$ .  
ولدينا لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $\varphi^{-1}(M(x)) = x$ . إذن:

ومنه :

$$S = \{M(2)\}$$

3. بين أن المجموعة  $F = \{M(\ln x) / x \in \mathbb{R}_+^*\}$  زمرة جزئية للزمرة  $(\mathbb{E}, +)$ .

.العنصر المحايد في  $(\mathbb{R}, +)$  هو العدد الحقيقي 0.

بما أن  $\varphi$  تشاكل تقابلي من  $(\mathbb{R}, +)$  نحو  $(\mathbb{E}, \times)$  فإن العنصر المحايد في  $(\mathbb{E}, \times)$  هو  $\varphi(0)$  أي المصفوفة  $M(0)$ .  
ولدينا  $M(0) = M(\ln 1)$  والعدد 1 عنصر من  $\mathbb{R}_+^*$  إذن  $M(0) \in F$  إذن  $F$  غير فارغة.  
ليكن  $a$  و  $b$  عنصريين من  $F$ .

إذن:  $a = M(\ln x)$  و  $b = M(\ln y)$  حيث  $x$  و  $y$  عنصران من  $]0; +\infty[$ .  
مقلوب المصفوفة  $b$  هو المصفوفة  $b^{-1} = M(-\ln y)$ .

$$\text{لدينا : } a \times b^{-1} = M(\ln x) \times M(-\ln y) = M(\ln x - \ln y) = M\left(\ln \frac{x}{y}\right)$$

وحيث أن  $\frac{x}{y}$  عنصر من  $]0; +\infty[$  فإن  $M\left(\ln \frac{x}{y}\right)$  عنصر من  $F$ .

وعليه فإن

$$F \text{ زمرة جزئية للزمرة } (\mathbb{E}, +).$$



http://www.vrac-coloriages.net

## التمرين 2:

1. أ. نتحقق أن العدد العقدي  $a = 1 + i(2 - \sqrt{3})$  حل للمعادلة  $z^2 - 4iz - 2 + 2i\sqrt{3} = 0$ :

تعويض ثم تبسيط ...

1. ب. نستنتج الحل الثاني  $b$  للمعادلة  $(E)$  :

نعلم أن مجموع الحلين هو :  $a + b = 4i$  . إذن :  $b = 4i - a$   
ومنه

$$\text{الحل الثاني هو } b = -1 + i(2 + \sqrt{3})$$

2. أ. نبين أن  $a^2 = 4(2 - \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{6}}$  :

لدينا :  $a^2 = (1 + i(2 - \sqrt{3}))^2 = -6 + 4\sqrt{3} + 4i - 2i\sqrt{3} = 4(2 - \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{6}}$   
ومنه

$$a^2 = 4(2 - \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{6}}$$

2. ب. نستنتج شكلا مثلثيا للعدد  $a$  :

لدينا  $a^2 = 4(2 - \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{6}}$  إذن : العدد  $a$  جذر مربع للعدد  $4(2 - \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{6}}$ .

ومنه :  $a = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{12}}$  أو  $a = -2\sqrt{2 - \sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{12}}$

وحيث أن الجزئين الحقيقي والتخيلي للعدد  $a$  موجبان فإن  $a = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{12}}$ .

**3. أ. لنحدد لحق مركز الدائرة :**

$[AB]$  قطر في الدائرة  $(\Gamma)$ . إذن لحق مركز الدائرة  $(\Gamma)$  هو  $\omega = \frac{a+b}{2}$

ومنه

لحق مركز الدائرة هو  $\omega = 2i$ .

**3. ب. بين أن  $O$  و  $C$  نقطتان من  $(\Gamma)$  :**

شعاع الدائرة  $(\Gamma)$  هو  $R = \frac{|b-a|}{2} = \frac{|2-2i\sqrt{3}|}{2} = 2$

بما أن  $C \in (\Gamma)$  فإن  $\Omega C = |c-2i| = \left| 2e^{i\frac{\pi}{7}} \right| = 2$

بما أن  $O \in (\Gamma)$  فإن  $\Omega O = |\omega| = |2i| = 2$

**3. ج. نبين أن العدد العقدي  $\frac{c-a}{c-b}$  تخيلي صرف :**

بما أن  $C$  تنتمي إلى الدائرة التي أحد أقطارها  $[AB]$  وتخالف النقطتين  $A$  و  $B$  فإن المثلث  $ABC$  قائم الزاوية في  $C$  ومنه قياس للزاوية الموجهة  $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$  هو عمدة لعدد عقدي تخيلي صرف.

وعليه فإن العدد العقدي  $\frac{c-a}{c-b}$  تخيلي صرف.

**التمرين 3:**

**أ. نحدد قيم  $X$  :**

نسحب عشوائيا الكرات واحدة تلو الأخرى ونقف حالما تظهر أول كرة بيضاء .  
ليكن  $X$  عدد الكرات المسحوبة . قيم  $X$  هي : 1 ، 2 و 3 .

**ب. نحسب احتمال  $p(X=1)$  :**

الحدث  $(X=1)$  هو الحصول على كرة بيضاء في المرة الأولى :

$$p(X=1) = \frac{\text{card}(X=1)}{\text{card}\Omega} = \frac{A_{10}^1}{A_{12}^1} = \frac{5}{6}$$

**ج. نبين أن  $p(X=2) = \frac{5}{33}$  :**

الحدث  $(X=2)$  هو الحصول على كرة حمراء في المرة الأولى وكرة بيضاء في المرة الثانية:

$$p(X=2) = \frac{\text{card}(X=2)}{\text{card}\Omega} = \frac{A_2^1 A_{10}^1}{A_{12}^2} = \frac{5}{33}$$

**د. نحسب احتمال الحدث  $(X=3)$  :**

الحدث  $(X=3)$  هو الحصول على كرة حمراء في المرة الأولى والثانية وكرة بيضاء في المرة الثالثة:

$$p(X=3) = \frac{\text{card}(X=3)}{\text{card}\Omega} = \frac{A_2^2 A_{10}^1}{A_{12}^3} = \frac{2 \times 10}{12 \times 11 \times 10} = \frac{1}{66}$$



$$2. \text{أثبت أن } E(X) = \frac{13}{11}$$

قانون احتمال  $X$  هو :

$x_i$	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{33}$	$\frac{1}{66}$

$$E(X) = 1 \cdot \frac{5}{6} + 2 \cdot \frac{5}{33} + 3 \cdot \frac{1}{66} \text{ هو : الأمل الرياضي للمتغير العشوائي } X$$

ومنه

$$E(X) = \frac{13}{11} \text{ الأمل الرياضي للمتغير العشوائي } X \text{ هو :}$$

2. ب. نحدد  $E(X^2)$  ثم نحسب  $V(X)$  :

$$E(X^2) = 1^2 \cdot \frac{5}{6} + 2^2 \cdot \frac{5}{33} + 3^2 \cdot \frac{1}{66} = \frac{52}{33}$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \text{ نعلم أن}$$

$$V(X) = \frac{52}{33} - \left(\frac{13}{11}\right)^2 = \frac{65}{363} \text{ إذن}$$

ومنه :

$$V(X) = \frac{65}{363} \quad \text{و} \quad E(X^2) = \frac{52}{11}$$

مسألة :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{1 - \ln(1-x)} & , 0 \leq x < 1 \\ f(1) = 0 \end{cases} \text{ نعتبر الدالة } f \text{ المعرفة على المجال } I = [0,1] \text{ بما يلي :}$$

الجزء 1 :

1. أثبت أن الدالة  $f$  متصلة على اليسار في 1 :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 - \ln X} \text{ لدينا بوضع } X = 1 - x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 - \ln X} = 0 \text{ فإن } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln X = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(0) \text{ وبالتالي}$$

ومنه  $f$  متصلة على اليسار في 1 .

2. لندرس قابلية اشتقاق  $f$  على اليسار في 1 :

لدينا :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{(x-1)(1 - \ln(1-x))} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{-X(1 - \ln X)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{-X + X \ln X} \end{aligned}$$

$$(X = 1 - x)$$

وبما أن  $X$  يؤول إلى  $0^+$  فيمكن اعتبار  $X$  من  $]0,1[$





وبالتالي:  $-X + X \ln X < 0$  أي:  $\lim_{X \rightarrow 0^+} -X + X \ln X = 0^-$

ومنه:  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -\infty$

وبالتالي  $f$  غير قابلة للاشتقاق على اليسار في 1.

### 3. ندرس تغيرات $f$ على $I$ :

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $[0,1[$  ولكل  $x$  من  $[0,1[$  لدينا:

$$f'(x) = \frac{-(1 - \ln(1-x))^2}{(1 - \ln(1-x))^2} = \frac{-1}{(1-x)(1 - \ln(1-x))^2} < 0$$

ومنه  $f$  تناقصية قطعاً على  $[0,1[$ .

وحيث أن  $f$  متصلة على اليسار في 1 فإن  $f$  تناقصية قطعاً على  $[0,1]$ .

جدول تغيرات الدالة  $f$  هو:

$x$	0	1
$f'(x)$		+
$f$	1	0

### 4.أ- نبين أن لمنحنى $f$ نقطة انعطاف وحيدة أفصولها $\frac{e-1}{e}$ :

$$f''(x) = \frac{-(1 - \ln(1-x))^2 + 2(1-x)(1 - \ln(1-x)) \cdot \frac{1}{1-x}}{(1-x)^2(1 - \ln(1-x))^4} = \frac{(1 - \ln(1-x))(1 + \ln(1-x))}{(1-x)^2(1 - \ln(1-x))^4}$$

بما أن  $1-x < 1$  فإن  $\ln(1-x) < 0$  ومنه:  $0 < 1 - \ln(1-x)$

وبالتالي إشارة  $f''(x)$  هي إشارة  $1 + \ln(1-x)$  ولدينا:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \ln(1-x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(1-x) = -1$$

$$\Leftrightarrow 1-x = \frac{1}{e}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{e-1}{e}$$

ولدينا:

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(1-x) > -1$$

$$\Leftrightarrow 1-x > \frac{1}{e}$$

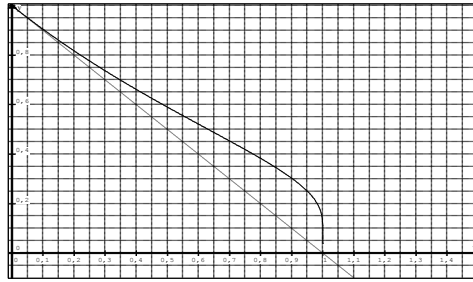
$$\Leftrightarrow x < \frac{e-1}{e}$$

المشتقة الثانية للدالة  $f$  تنعدم وتغير إشارتها عند  $\frac{e-1}{e}$ .

ومنه

منحنى  $f$  يقبل نقطة انعطاف وحيدة أفصولها  $\frac{e-1}{e}$ .

### 4.ب- إنشاء منحنى $f$ :



5. نبين وجود عدد حقيقي وحيد  $\alpha$  من  $I$  حيث  $f(\alpha) = \alpha$ .

نعتبر الدالة العددية  $\varphi$  المعرفة على  $I$  بما يلي :  $\varphi(x) = f(x) - x$   
 الدالتان :  $f$  و  $x \mapsto -x$  تناقصيتان على  $I$  إذن  $\varphi$  تناقصية قطعا على  $I$ . (مجموع دالتين لهما نفس الرتبة على مجال)  
 ولدينا :  $\varphi$  متصلة على  $I$  (مجموع دالتين متصلتين على مجال)  
 ولدينا :  $\varphi(0) \times \varphi(1) = -1 < 0$   
 إذن : حسب مبرهنة القيم الوسطية المعادلة  $\varphi(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  في  $]0,1[$ .  
 ومنه

يوجد عنصر وحيد  $\alpha$  في  $I$  حيث  $f(\alpha) = \alpha$

6. أ. نبين أن  $f$  تقابل من  $I$  نحو  $I$  :

بما أن  $f$  متصلة وتناقصية قطعا على المجال  $I$   
 فإن  $f$  تقابل من  $I$  نحو المجال  $[f(1); f(0)] = [0; 1]$ .

6. ب. لنحدد  $f^{-1}(x)$  لكل  $x$  من  $I$  :

ليكن  $x$  و  $y$  عنصرين من  $I$  حيث  $f^{-1}(x) = y$   
 . إذا كان  $x = 0$  فإن  $y = 1$  لأن  $f(1) = 0$   
 نفترض أن  $x \neq 0$  لدينا :

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1 - \ln(1 - y)} = x$$

$$\Leftrightarrow \ln(1 - y) = \frac{x - 1}{x}$$

$$\Leftrightarrow y = 1 - e^{\frac{x-1}{x}}$$

ومنه

$$\begin{cases} f^{-1}(x) = 1 - e^{\frac{x-1}{x}} & ; x \in ]0; 1[ \\ f^{-1}(0) = 1 \end{cases}$$

الجزء 2:

ليكن  $n$  من  $N$ ، لدينا :  $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 t^{n+1} f(t) dt - \int_0^1 t^n f(t) dt = \int_0^1 t^n (t-1) f(t) dt$

وحيث أن  $t \in [0; 1]$  فإن  $t-1 \leq 0$  وبالتالي  $t^n (t-1) f(t) \leq 0$  إذن  $\int_0^1 t^n (t-1) f(t) dt \leq 0$

ومنه  $I_{n+1} - I_n \leq 0$  لكل  $n$  من  $N$ .

وعليه فإن المتتالية  $(I_n)$  تناقصية.

لدينا  $f(t) \geq 0$  لكل  $t$  من  $[0; 1]$ . إذن  $I_n = \int_0^1 t^n f(t) dt \geq 0$  لكل  $n$  من  $N$ .



ومنه  $(I_n)$  مصغرة بالعدد 0.  
بما أن  $(I_n)$  تناقصية ومصغرة فإنها متقاربة .

2. نبين أن  $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$  لكل  $n$  من  $N$  :

ليكن  $n$  من  $N$  ،  
لدينا:  $f(t) \leq 1$  لكل  $t$  من  $[0; 1]$  .  
إن  $t^n f(t) \leq t^n$  لكل  $t$  من  $[0; 1]$  .  
ومنه :  $0 \leq \int_0^1 t^n f(t) dt \leq \int_0^1 t^n dt$

وحيث أن  $\int_0^1 t^n dt = \left[ \frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$  فإن  $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$  لكل  $n$  من  $N$  .

نحدد نهاية المتتالية  $(I_n)$

بما أن  $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$  لكل  $n$  من  $N$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$  فإن  $\lim I_n = 0$  (مبرهنة الدركي... احتراماتي وتقديراتي !

.)

الجزء 3:

1. نبين أن  $F(x) - S_n(x) = \int_0^x \frac{t^{n+1} f(t)}{1-t} dt$  لكل  $n$  من  $N$  و  $x$  من  $J$  :

ليكن  $n$  من  $N$  و  $x$  من  $J = ]0; 1[$  :لدينا :

$$\begin{aligned} F(x) - S_n(x) &= \int_0^x \frac{f(t)}{1-t} dt - \sum_{k=0}^n F_k(x) \\ &= \int_0^x \frac{f(t)}{1-t} dt - \sum_{k=0}^n \int_0^x t^k f(t) dt \\ &= \int_0^x \frac{f(t)}{1-t} dt - \int_0^x \left( \sum_{k=0}^n t^k \right) f(t) dt \\ &= \int_0^x \frac{f(t)}{1-t} dt - \int_0^x \left( \frac{1-t^{n+1}}{1-t} \right) f(t) dt \\ &= \int_0^x \frac{f(t)}{1-t} dt - \left( \frac{1-t^{n+1}}{1-t} \right) f(t) dt \\ &= \int_0^x \frac{t^{n+1} f(t)}{1-t} dt \end{aligned}$$



<http://www.vrac-coloriages.net>



<http://www.vrac-coloriages.net>

ومنه :

$$F(x) - S_n(x) = \int_0^x \frac{t^{n+1} f(t)}{1-t} dt \text{ لكل } n \text{ من } N \text{ و } x \text{ من } J .$$

2أ. نبين أن الدالة  $x \mapsto (1-x)(1-\ln(1-x))$  تناقصية قطعاً على المجال  $J$  :

الدالة  $\varphi : x \mapsto (1-x)(1-\ln(1-x))$  قابلة للإشتقاق على  $J$  حسب العمليات على الدوال القابلة للإشتقاق على مجال  
ولكل  $x$  من  $J$  لدينا :  $\varphi'(x) = \ln(1-x)$

وحيث أن  $x \in ]0, 1[$  فإن  $\varphi'(x) \leq 0$  أي أن  $\varphi$  تناقصية قطعاً على  $J$  .

2ب. نستنتج أن الدالة  $f(t) \mapsto \frac{f(t)}{1-t}$  تزايدية قطعاً على  $[0, x]$  حيث  $x$  عنصر من  $J$  .

ليكن  $x$  عنصراً من  $J$  .

$$\frac{f(t)}{1-t} = \frac{1}{(1-t)(1-\ln(1-t))} = \frac{1}{\varphi(t)} \quad \text{لكل } t \text{ من } [0, x] \text{ لدينا}$$

وحيث أن  $\varphi$  تناقصية قطعا على  $[0, x]$  ولا تنعدم عليه فإن  $\frac{1}{\varphi}$  تزايدية قطعا على  $[0, x]$ .

ومنه :

$$\text{الدالة } t \mapsto \frac{f(t)}{1-t} \text{ تزايدية قطعا على } [0, x] \text{ لكل } x \text{ عنصر من } J$$

3.أ.بين أن  $0 \leq F(x) - S_n(x) \leq \frac{1}{1-x} \frac{1}{n+2}$  لكل  $n$  من  $N$  و  $x$  من  $J$  :

ليكن  $n$  من  $N$  و  $x$  من  $J$  ،

$$\text{لدينا : } F(x) - S_n(x) = \int_0^x \frac{t^{n+1}f(t)}{1-t} dt$$

لكل  $t$  من  $[0, x]$  لدينا  $0 \leq \frac{f(t)}{1-t} \leq \frac{f(x)}{1-x}$  لأن الدالة  $t \mapsto \frac{f(t)}{1-t}$  تزايدية قطعا على  $[0, x]$ .

ومنه  $0 \leq \frac{t^{n+1}f(t)}{1-t} \leq \frac{t^{n+1}f(x)}{1-x}$  لكل  $t$  من  $[0, x]$ .

$$\text{وبالتالي : } 0 \leq \int_0^x \frac{t^{n+1}f(t)}{1-t} dt \leq \int_0^x \frac{t^{n+1}f(x)}{1-x} dt$$

أي :  $f(x) \leq 1$  لأن  $0 \leq \int_0^x \frac{t^{n+1}f(t)}{1-t} dt \leq \frac{1}{1-x} \int_0^x t^{n+1} dt$

$$\text{ولدينا } \int_0^x t^{n+1} dt = \left[ \frac{t^{n+2}}{n+2} \right]_0^x = \frac{x^{n+2}}{n+2}$$

وبما أن  $x \in [0, 1[$  فإن  $\frac{x^{n+2}}{n+2} < \frac{1}{n+2}$  ومنه  $0 \leq \int_0^x \frac{t^{n+1}f(t)}{1-t} dt \leq \frac{1}{1-x} \frac{1}{n+2}$

وعليه فإن :

$$0 \leq F(x) - S_n(x) \leq \frac{1}{1-x} \frac{1}{n+2} \quad \text{لكل } n \text{ من } N \text{ و } x \text{ من } J$$

3.ب نستنتج أن لكل  $x$  من  $J$  لدينا :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = F(x)$  :

ليكن  $x$  من  $J$  ،

$$0 \leq F(x) - S_n(x) \leq \frac{1}{1-x} \frac{1}{n+2} \quad \text{لكل } n \text{ من } N \text{ لدينا}$$

وحيث أن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = F(x)$  فإن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-x} \frac{1}{n+2} = 0$

ومنه :

$$\text{لكل } x \text{ من } J \text{ لدينا : } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = F(x)$$

4.أ. نحدد  $F(x)$  من أجل  $x \in J$  :

ليكن  $x$  من  $J$  ، لدينا :

$$F(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{1-t} dt = \int_0^x \frac{1}{(1-t)(1-\ln(1-t))} dt = \int_0^x \frac{(1-\ln(1-t))'}{(1-\ln(1-t))^2} dt = [\ln|1-\ln(1-t)|]_0^x = \ln(1-\ln(1-x))$$

ومنه :

$$\text{لكل } x \text{ من } J \text{ لدينا : } F(x) = \ln(1-\ln(1-x))$$



4. ب. نحدد النهاية  $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x)$  :

لدينا  $t = 1 - x$  بوضع  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1 - x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln t = -\infty$

ومنه:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = +\infty$$

وفقكم الله



<http://www.xrac-colorpages.net>

