



استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

الجزءان الأول و الثاني مستقلان

التمرين الأول : (4,0 ن)

(I) في الحلقة الواحدية $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ نعتبر المصفوفتين \mathbb{A} و \mathbb{I} المعرفتين بما يلي :

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

نضع : $\forall n \in \mathbb{N} : \mathbb{A}^{n+1} = \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}$ و $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A} \times \mathbb{A}$ و $\mathbb{A}^1 = \mathbb{A}$ و $\mathbb{A}^0 = \mathbb{I}$

① بين أن : $\forall k \in \mathbb{N} : \mathbb{A}^{2k} = \mathbb{I}$ ن 0,50

② بين أن المصفوفة \mathbb{A} تقبل مقلوبا \mathbb{A}^{-1} ينبغي تحديده. ن 0,50

ليكن α عددا حقيقيا موجبا قطعيا .

لكل x و y من المجال $I =]\alpha, +\infty[$ نضع : $x * y = (x - \alpha)(y - \alpha) + \alpha$

① أ بين أن : * قانون تركيب داخلي في I ن 0,50

ب بين أن القانون * تبادلي و تجميعي ن 0,50

ج بين أن المجموعة $(I, *)$ تقبل عنصرا محايدا يتم تحديده ن 0,50

② بين أن المجموعة $(I, *)$ زمرة تبادلية ن 0,50

③ نعتبر التطبيق :

$$\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \longrightarrow \frac{1}{x - \alpha}$$

أ بين أن التطبيق φ تشاكل تقابلي من $(I, *)$ إلى (\mathbb{R}_+^*, \times) . ن 0,50

ب حل في المجموعة I المعادلة : $x^{(3)} = \alpha^3 + \alpha$ بحيث : $x^{(3)} = x * x * x$ ن 0,50

التمرين الثاني : (2,5 ن)

ليكن N العدد الصحيح الطبيعي الممثل في نظمة العد العشري بما يلي : $N = \underbrace{111 \dots 11}_{\text{1 مرة 2010}}$

① بين أن N يقبل القسمة على العدد 11 ن 0,25

② أ تحقق أن العدد 2011 أولي , و أن : $10^{2010} - 1 = 9N$ ن 0,75

ب بين أن العدد 2011 يقسم العدد $9N$ ن 0,50

ج استنتج أن العدد 2011 يقسم العدد N . ن 0,50

③ بين أن العدد N يقبل القسمة على العدد 22121 . ن 0,50



(I) ليكن m عددا عقديا غير منعدم . نعتبر في المجموعة \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول z :

$$(E_m) : z^2 + [(1 - i)m - 4]z - im^2 - 2(1 - i)m + 4 = 0$$

① تحقق أن العدد $z_1 = 2 - m$ حل للمعادلة (E_m) .

0,50 ن

② ليكن z_2 الحل الثاني للمعادلة (E_m) .① بين أن $z_1 z_2 = 1 \Leftrightarrow im^2 + 2(1 - i) - 3 = 0$

0,50 ن

② حدد قيمتي m بحيث $z_1 z_2 = 1$

1,00 ن

(II) المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(\sigma, \vec{u}, \vec{v})$.

نعتبر التطبيق S الذي يربط النقطة M التي لحقها z بالنقطة M' التي لحقها z' بحيث : $z' = -(z - 1) + 1$
 و الدوران \mathcal{R} الذي مركزه النقطة Ω ذات اللق $(1 + i)$ و قياس زاويته $\frac{\pi}{2}$ و ليكن z'' لحق النقطة M'' صورة M بالدوران \mathcal{R} .

① ① بين أن التطبيق S هو التماثل المركزي الذي مركزه النقطة ذات اللق 1

0,25 ن

② بين أن : $z'' = iz + 2$.

0,25 ن

② نفترض أن النقطة M تخالف O أصل المعلم و لتكن A النقطة التي لحقها 2① أحسب $\frac{z'' - 2}{z' - 2}$ ثم استنتج طبيعة المثلث $AM'M''$

0,50 ن

② حدد مجموعة النقط M بحيث تكون النقط A و Ω و M' و M'' متداورة .

0,50 ن

(I) دراسة الحلول الموجبة للمعادلة $e^x = x^n$ بحيث $n \in \mathbb{N}^*$.

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة : $\mathcal{D} =]0,1[\cup]1, +\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{\ln x} ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$
و ليكن (\mathcal{C}) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(\sigma, \vec{i}, \vec{j})$.① تحقق أنه لكل x من المجموعة $]0,1[\cup]1, +\infty[$ لدينا : $(e^x = x^n \Leftrightarrow n = f(x))$.

0,25 ن

② بين أن الدالة f قابلة للإشتقاق على اليمين في 0 .

0,50 ن

③ أحسب النهايات التالية ثم أول هندسيا النتائج المحصل عليها :

1,50 ن

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

④ أدرس تغيرات الدالة f على كل من المجالين $]0,1[$ و $]1, +\infty[$ ثم إعط جدول تغيراتها .

0,75 ن

⑤ بين أن (\mathcal{C}) يقبل نقطة انعطاف يتم تحديد زوج احداثيتها .

0,50 ن

⑥ أنشئ المنحنى (\mathcal{C})

0,50 ن

⑦ بين أنه إذا كان $n \geq 3$ فإن المعادلة (E) تقبل بالضبط حلين اثنين α_n و β_n بحيث $1 < \alpha_n < e < \beta_n$.

0,50 ن

(II) دراسة تقارب المتتاليتين $(\alpha_n)_{n \geq 3}$ و $(b_n)_{n \geq 3}$.

① بين أن $b_n \geq n$ ($\forall n \geq 3$) ثم استنتج نهاية المتتالية $(b_n)_{n \geq 3}$ ن 0,50

② (أ) بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n \geq 3}$ تناقصية ثم استنتج أنها متقاربة. ن 0,50

② (ب) بين أن $\frac{1}{n} < \ln(\alpha_n) < \frac{e}{n}$ ($\forall n \geq 3$) ثم استنتج نهاية المتتالية $(\alpha_n)_{n \geq 3}$. ن 0,50

② (ج) بين أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n)^n = e$ ن 0,50

التمرين الخامس: (3,5 ن)

نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي :
$$F(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$$



① (أ) بين أن : $0 \leq F(x) \leq xe^{-x^2}$ ($\forall x \geq 0$) ن 0,50

② (ب) بين أن : $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ ($\forall x \geq 1$) ثم استنتج نهاية الدالة F عند $+\infty$. ن 0,50

② بين أن : F قابلة للإشتقاق على $[0, +\infty[$ وأن : $F'(x) = e^{-2x^2} - 2xF(x)$ ($\forall x \geq 0$) ن 0,50

③ نعتبر الدالة العددية G المعرفة على $[0, \frac{\pi}{2}]$ بما يلي :
$$\begin{cases} G(x) = F(\tan x) \\ G(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

① بين أن الدالة G متصلة على اليسار في $\frac{\pi}{2}$. ن 0,25

② بين أنه يوجد عدد حقيقي c ينتمي إلى المجال $[0, +\infty[$ بحيث : $F'(c) = 0$ وأن $F(c) = \frac{1}{2c} e^{-2c^2}$. ن 0,75

(يمكن تطبيق مبرهنة رول بالنسبة للدالة G على المجال $[0, \frac{\pi}{2}]$)

④ نعتبر الدالة العددية H المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي :
$$H(x) = F'(x) \frac{e^{x^2}}{2x}$$



① بين أن الدالة H تناقصية قطعاً على المجال $]0; +\infty[$. ن 0,50

② استنتج أن العدد c وحيد ثم إعط جدول تغيرات الدالة F . ن 0,50



استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

$$x * y = \frac{xy}{xy + (1-x)(1-y)}$$

لكل x و y من المجال $I =]0,1[$ نضع :

التمرين الأول : (3,5 ن)

① (أ) بين أن قانون تركيب داخلي في I .

0,50 ن

(ب) بين أن القانون (*) تبادلي و تجميعي.

0,50 ن

(ج) بين أن $(I,*)$ يقبل عنصرا محايدا ينبغي تحديده.

0,50 ن

(2) بين أن $(I,*)$ زمرة تبادلية.

0,50 ن

$$\mathbb{K} = \left\{ \frac{1}{2^n + 1} / n \in \mathbb{Z} \right\}$$

و

$$\mathbb{H} = \{ 2^n / n \in \mathbb{Z} \}$$

(3) نعتبر المجموعتين :

(أ) بين أن \mathbb{H} زمرة جزئية للزمرة (\mathbb{R}_+, \times) .

0,50 ن

(ب) نعتبر التطبيق φ المعرف بما يلي :

0,50 ن

بين أن التطبيق φ تشاكل من (\mathbb{H}, \times) إلى $(I, *)$

$$\begin{array}{ccc} \varphi : \mathbb{H} & \longrightarrow & I \\ x & \longrightarrow & \frac{1}{x+1} \end{array}$$

(ج) استنتج أن $(\mathbb{K},*)$ زمرة جزئية للزمرة $(I,*)$.

0,50 ن

التمرين الثاني : (2,5 ن)

ليكن x عددا صحيحا طبيعيا يحقق $10^x \equiv 2[19]$.



① (أ) تحقق أن : $10^{x+1} \equiv 1[19]$.

0,25 ن

(ب) بين أن : $10^{18} \equiv 1[19]$.

0,50 ن

(2) ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين 18 و $(x+1)$.

(أ) بين أن : $10^d \equiv 1[19]$.

0,75 ن

(ب) بين أن : $d \equiv 18$.

0,50 ن

(ج) استنتج أن : $x \equiv 17[18]$.

0,50 ن

التمرين الثالث : (4,0 ن)

(I) نعتبر في المجموعة \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول z التالية :

$$(E) : z^3 - (1 + 2i)z^2 + 3(1 + i)z - 10(1 + i) = 0$$

(1) بين أن العدد $-2i$ حل للمعادلة (E) .

0,50 ن

(2) حدد العددين العقديين α و β بحيث :

0,50 ن

$$(\forall z \in \mathbb{C}) : z^3 - (1 + 2i)z^2 + 3(1 + i)z - 10(1 + i) = (z + 2i)(z^2 + \alpha z + \beta)$$

(3) (أ) حدد الجذرين المربعين للعدد $(5 - 12i)$.

0,50 ن

(ب) حل في \mathbb{C} المعادلة (E) .

0,50 ن



(II) المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(\sigma, \vec{u}, \vec{v})$.

نعتبر النقط A و B و C التي أحاقها على التوالي هي : $a = -1 + 3i$ و $b = -2i$ و $c = 2 + i$.

① بين أن ABC قائم الزاوية ومتساوي الساقين في النقطة C .

0,50 ن

② نعتبر الدوران \mathcal{R}_1 الذي مركزه B و زاويته $\frac{\pi}{3}$ و الدوران \mathcal{R}_2 الذي مركزه A و زاويته $\frac{-2\pi}{3}$.

لتكن M نقطة من المستوى العقدي لحقها z و صورتها بالدوران \mathcal{R}_1 و \mathcal{R}_2 صورتهما بالدوران \mathcal{R}_2 .

① تحقق أن الصيغة العقدية للدوران \mathcal{R}_1 هي : $z_1 = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)z - \sqrt{3} - i$

0,50 ن

② حدد z_2 لحق M_2 بدلالة z.

0,50 ن

③ استنتج أن النقطة I منتصف القطعة $[M_1M_2]$ نقطة ثابتة.

0,50 ن

التمرين الرابع : (6,0 ن) لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ بما يلي : $f(x) = x + \ln x$

و ليكن (\mathcal{E}) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(\sigma, \vec{i}, \vec{j})$ ($\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1\text{cm}$)

① أحسب النهايات التالية: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$

1,00 ن

② اضع جدول تغيرات الدالة f .

0,50 ن

③ بين أن الدالة f تقابل من المجال $]0, +\infty[$ نحو مجال J يتم تحديده ثم ضع جدول تغيرات التقابل العكسي f^{-1} .

0,75 ن

④ أحسب : $f(1)$ و $f(e)$ ثم أنشئ (\mathcal{E}) و (\mathcal{E}^{-1}) منحنى الدالة f^{-1} في نفس المعلم $(\sigma, \vec{i}, \vec{j})$.

0,50 ن



④ ا) أحسب التكامل : $\int_1^{e+1} f^{-1}(x) dx$ (يمكن أن تضع $t = f^{-1}(x)$)

0,50 ن

ب) استنتج مساحة حيز المستوى المحصور بين (\mathcal{E}^{-1}) و المستقيمت : $x = 1$ و $x = e + 1$ و $y = x$.

0,50 ن

⑤ نعتبر المعادلة : $x + \ln x = n$: (E_n) .

ا) بين أن المعادلة (E_n) تقبل حلا وحيدا x_n .

0,25 ن

ب) حدد قيمة x_1 ثم بين أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$

0,50 ن

⑥ ا) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; f(x_n) \leq f(n)$ ثم استنتج أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : x_n \leq n$.

0,50 ن

ب) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; n - \ln n \leq x_n$.

0,50 ن



ج) أحسب النهايتين التاليتين: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{x_n}{n - \ln n}\right)$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{x_n - n}{n}\right)$

0,50 ن

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم و f_n الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بما يلي :

$$f_n(x) = -1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n}$$

① بين أنه من أجل $n \geq 2$ يوجد عدد حقيقي و حيد α_n من المجال $]0,1[$ بحيث : $f_n(\alpha_n) = 0$ ن 0,50

② بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ تناقصية قطعا ثم استنتج أنها متقاربة (نضع : $\ell = \lim_{+\infty}(\alpha_n)$) ن 0,75

③ (أ) تحقق أنه من أجل $t \neq 1$ لدينا : $1 + t + t^2 + \dots + t^{n-1} = \frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t}$ ن 0,50

ⓑ استنتج أن : $\alpha_n + \frac{(\alpha_n)^2}{2} + \frac{(\alpha_n)^3}{3} + \dots + \frac{(\alpha_n)^n}{n} = -\ln(1 - \alpha_n) - \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t} dt$ ن 0,50



④ (أ) بين أن : $1 + \ln(1 - \alpha_n) = - \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t} dt$ ن 0,50

ⓑ بين أن : $(\forall n \geq 2) : 0 \leq \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{1}{(n+1)(1-\alpha_n)}$ ن 0,50

Ⓒ استنتج أن : $\ell = 1 - e^{-1}$ ن 0,50

