



3	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
7	المعامل	شعبة العلوم التجريبية بمسالكها وشعبة العلوم والتكنولوجيات بمسلكها	الشعبة أو المسلك

تعليمات عامة

- يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة ؛
- عدد الصفحات: 3 (الصفحة الأولى تتضمن تعليمات ومكونات الموضوع والصفحتان المتبقيتان تتضمنان موضوع الامتحان) ؛
- يمكن للمترشح إنجاز تمارين الامتحان حسب الترتيب الذي يناسبه ؛
- ينبغي تفادي استعمال اللون الأحمر عند تحرير الأجوبة ؛
- بالرغم من تكرار بعض الرموز في أكثر من تمرين ، فكل رمز مرتبط بالتمرين المستعمل فيه ولا علاقة له بالتمارين السابقة أو اللاحقة .

مكونات الموضوع

- يتكون الموضوع من ثلاثة تمارين ومسألة ، مستقلة فيما بينها ، وتتنوع حسب المجالات كما يلي :

3 نقط	الهندسة الفضائية	التمرين الأول
3 نقط	الأعداد العقدية	التمرين الثاني
3 نقط	حساب الاحتمالات	التمرين الثالث
11 نقطة	دراسة دالة عددية و حساب التكامل والمنتاليات العددية	المسألة

- بالنسبة للمسألة ، \ln يرمز لدالة اللوغاريتم النبيري

التمرين الأول: (3 ن)

- نعتبر، في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، النقطتين $A(2, 1, 0)$ و $B(-4, 1, 0)$
- (1) ليكن (P) المستوى المار من النقطة A و $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ متجهة منظمية عليه . 0.5
- بين أن $x + y - z - 3 = 0$ هي معادلة ديكراتية للمستوى (P)
- (2) لتكن (S) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق العلاقة $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = 0$ 0.75
- بين أن (S) هي الفلكة التي مركزها النقطة $\Omega(-1, 1, 0)$ و شعاعها 3
- (3) أ- احسب مسافة النقطة Ω عن المستوى (P) ثم استنتج أن (P) يقطع (S) وفق دائرة (C) 0.5
- ب- بين أن مركز الدائرة (C) هو النقطة $H(0, 2, -1)$ 0.5
- (4) بين أن $\overline{OH} \wedge \overline{OB} = \vec{i} + 4\vec{j} + 8\vec{k}$ ثم استنتج مساحة المثلث OHB 0.75

التمرين الثاني: (3 ن)

I- نعتبر العدد العقدي a بحيث $a = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

(1) بين أن معيار العدد العقدي a هو $2\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ 0.5

(2) تحقق من أن $a = 2\left(1 + \cos\frac{\pi}{4}\right) + 2i \sin\frac{\pi}{4}$ 0.25

(3) أ- باخظاظ $\cos^2 \theta$ ، حيث θ عدد حقيقي ، بين أن $1 + \cos 2\theta = 2\cos^2 \theta$ 0.25

ب- بين أن $a = 4\cos^2\frac{\pi}{8} + 4i\cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}$ (نذكر أن $\sin 2\theta = 2\cos\theta\sin\theta$) 0.5

ج- بين أن $4\cos\frac{\pi}{8}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$ هو شكل مثلثي للعدد a ثم بين أن $a^4 = \left(2\sqrt{2 + \sqrt{2}}\right)^4 i$ 0.5

II- نعتبر، في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ، النقطتين Ω و A اللتين لحقاهما

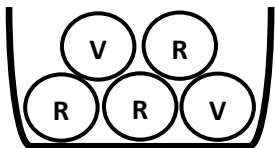
على التوالي هما ω و $a = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ و $\omega = \sqrt{2}$ و R الدوران الذي مركزه Ω و زاويته $\frac{\pi}{2}$

(1) بين أن اللق b للنقطة B صورة النقطة A بالدوران R هو $2i$ 0.5

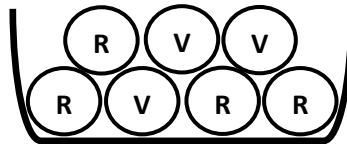
(2) حدد مجموعة النقط M ذات اللق z بحيث $|z - 2i| = 2$ 0.5

التمرين الثالث: (3 ن)

يحتوي صندوق U_1 على 7 كرات : أربع كرات حمراء و ثلاث كرات خضراء (لا يمكن التمييز بينها باللمس)
و يحتوي صندوق U_2 على 5 كرات : ثلاث كرات حمراء و كرتان خضراوان (لا يمكن التمييز بينها باللمس)



الصندوق U_2



الصندوق U_1

(I) نعتبر التجربة التالية : نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كرات من الصندوق U_1 2

ليكن A الحدث : " الحصول على كرة حمراء واحدة و كرتين خضراوين " .

و B الحدث : " الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون " .

$$\text{بين أن } p(A) = \frac{12}{35} \text{ و } p(B) = \frac{1}{7}$$

(II) نعتبر التجربة التالية : نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين من U_1 ثم نسحب عشوائيا كرة واحدة من U_2 1

ليكن C الحدث : " الحصول على ثلاث كرات حمراء " .

$$\text{بين أن } p(C) = \frac{6}{35}$$

المسألة : (11 ن)

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x بحيث : $f(x) = \frac{1}{x(1-\ln x)}$

و ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) (الوحدة : 2 cm)

(I) بين أن $D_f =]0, e[\cup]e, +\infty[$ هي مجموعة تعريف الدالة f

(2) أ- احسب $\lim_{x \rightarrow e^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow e^+} f(x)$ و أول هندسيا النتيجة المتوصل إليهما .

ب- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مقاربا بجوار $+\infty$ يتم تحديده .

ج- بين أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ ثم أول هندسيا النتيجة (لحساب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ لاحظ أن $x(1-\ln x) = x - x \ln x$)

(3) أ- بين أن $f'(x) = \frac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$ لكل x من D_f

ب- بين أن الدالة f تناقصية على المجال $]0, 1[$ و تزايدية على كل من المجالين $[1, e[$ و $]e, +\infty[$

ج- ضع جدول تغيرات الدالة f على D_f

(II) لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ بما يلي : $g(x) = 1 - x^2(1 - \ln x)$

و ليكن (C_g) المنحنى الممثل للدالة g في معلم متعامد ممنظم (انظر الشكل)

(1) أ- حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة (E) التالية : $g(x) = 0$, $x \in]0, +\infty[$

ب- نعطي جدول القيم التالي :

x	2,1	2,2	2,3	2,4
$g(x)$	-0,14	-0,02	0,12	0,28

بين أن المعادلة (E) تقبل حلا α بحيث $2,2 < \alpha < 2,3$

(2) أ- تحقق من أن $f(x) - x = \frac{g(x)}{x(1-\ln x)}$ لكل x من D_f

ب- بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ يقطع المنحنى

(C_f) في النقطتين اللتين أفصولاهما 1 و α

ج- حدد ، انطلاقا من (C_g) ، إشارة الدالة g على المجال $[1, \alpha]$ و بين أن $f(x) - x \leq 0$ لكل x من $[1, \alpha]$

(3) أنشئ ، في نفس المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) ، المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f)

(4) أ- بين أن $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)} dx = \ln 2$ (لاحظ أن : $\frac{1}{x(1-\ln x)} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1-\ln x}$ لكل x من D_f)

ب- احسب ، ب cm^2 ، مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) و المستقيمين

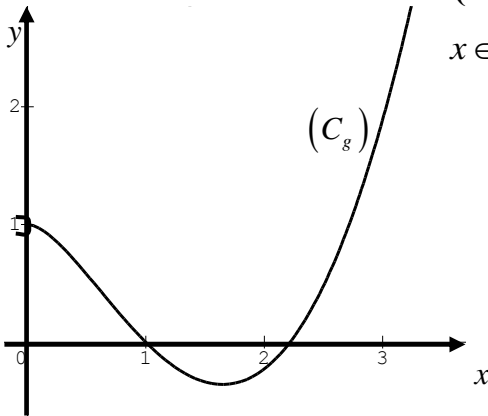
الذين معادلتهما $x = \sqrt{e}$ و $x = 1$

(III) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ لكل n من IN

(1) بين بالترجع أن $1 \leq u_n \leq \alpha$ لكل n من IN

(2) بين أن المتتالية (u_n) تناقصية (يمكن استعمال نتيجة السؤال (II) 2 ج-)

(3) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة و حدد نهايتها .



الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا 2015 - الدورة الاستدراكية -

الشعب (ة) أو المسلك: شعبة العلوم التجريبية بمسالكها

مادة الرياضيات

تمرين رقم 1

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي: $u_n = 4$ و $u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3$ لكل n من IN

- 1- بين بالترجع أن $u_n < 5$ لكل n من IN
- 2- تحقق من أن $u_{n+1} - u_n = \frac{3}{5}(5 - u_n)$ لكل n من IN ثم استنتج أن المتتالية (u_n) تزايدية .
- 3- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .

4- لتكن (v_n) المتتالية العددية بحيث $v_n = 5 - u_n$ لكل n من IN

- أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{5}$ ثم اكتب v_n بدلالة n
- ب- استنتج أن $u_n = 5 - \left(\frac{2}{5}\right)^n$ لكل n من IN واحسب نهاية المتتالية (u_n) .

تمرين رقم 2

نعتبر ، في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، المستوى (P) الذي معادلته $2x - z - 2 = 0$ والكرة

(S) التي معادلتها $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2z - 7 = 0$

- 1- بين أن مركز الكرة (S) هو النقطة $\Omega(-1, 0, 1)$ وأن شعاعها هو 3
- 2- أ- أحسب مسافة النقطة Ω عن المستوى (P)
- ب- استنتج أن المستوى (P) يقطع الكرة (S) وفق دائرة (Γ)
- 3- بين أن شعاع الدائرة (Γ) هو 2 و حدد مثلث إحداثيات النقطة H مركز الدائرة (Γ)

تمرين رقم 3

1- أ- حل في مجموعة الأعداد العقدية C المعادلة: $z^2 - 8z + 32 = 0$

ب- نعتبر العدد العقدي a بحيث $a = 4 + 4i$

اكتب العدد العقدي a على الشكل المثلث ثم استنتج أن a^{12} عدد حقيقي سالب .

2- نعتبر في المستوى العقدي إلى معلم متعامد ممنظم مباشر (O, \vec{u}, \vec{v}) النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي

a و b و c بحيث $a = 4 + 4i$ و $b = 2 + 3i$ و $c = 3 + 4i$

ليكن z لحق نقطة M من المستوى و z' لحق النقطة M' صورة M بالدوران R الذي مركزه C وزاويته $\frac{\pi}{2}$

أ- بين أن $z' = iz + 7 + i$

ب- تحقق من أن d لحق النقطة D صورة النقطة A بالدوران R هو $3 + 5i$

ج- بين أن مجموعة النقط M ذات اللحق z بحيث $|z - 4 - 4i| = |z - 3 - 5i|$ هي المستقيم (BC)

تمرين رقم 4

يحتوي صندوق على 5 بيدقتان بيضاوان و بيدقتان خضروان و بيدقة حمراء واحدة (لا يمكن التمييز بين البيدقات باللمس).
نسحب عشوائيا بالتتابع و بإحلال ثلاث بيدقات من الصندوق .

1- ليكن A الحدث : «البيدقات الثلاث المسحوبة من نفس اللون» .

$$- \text{ بين أن } p(A) = \frac{17}{125}$$

2- ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد البيدقات البيضاء المسحوبة .

- حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X .

تمرين رقم 5

I- لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي : $g(x) = 1 - x + x \ln x$

أ- بين أن $g'(x) = \ln x$ لكل x من $]0, +\infty[$

ب- بين أن الدالة g تناقصية على $]0, 1[$ و تزايدية على $]1, +\infty[$

2- أحسب $g(1)$ واستنتج أن $g(x) \geq 0$ لكل x من $]0, +\infty[$

II- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي : $f(x) = 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{2 \ln x}{x}$

وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) (الوحدة : $1cm$)

1- بين أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ وأول هندسيا النتيجة

(لحساب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ لاحظ أن $f(x) = \frac{3x^2 - 1 - 2x \ln x}{x^2}$ لكل x من $]0, +\infty[$)

2- بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ واستنتج طبيعة الفرع اللانهائي للمنحنى (C) بجوار $+\infty$

3- أ- بين أن $f'(x) = \frac{2g(x)}{x^3}$ لكل x من $]0, +\infty[$

ب- أول هندسيا النتيجة $f'(1) = 0$

ج- بين أن الدالة f تزايدية على $]0, +\infty[$

4- أنشئ ، في المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) ، المنحنى (C) (نقبل أن للمنحنى (C) نقطتي انعطاف أفصول إحداهما 1 و أفصول

الأخرى محصور بين 2 و 2.5 و نأخذ $(f(0,3) = 0)$

5- أ- بين أن $\int_1^e \frac{2 \ln x}{x} dx = 1$

ب- أحسب ، ب cm^2 ، مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما

$$x=e \text{ و } x=1$$

6- لتكن h الدالة العددية المعرفة على IR^* بما يلي : $h(x) = 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{\ln(x^2)}{|x|}$

أ- بين أن الدالة h زوجية وأن $h(x) = f(x)$ لكل x من $]0, +\infty[$

ب- أنشئ ، في نفس المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) ، المنحنى (C) الممثل للدالة h .